

# 基于均匀化转换方法的 FGM 圆柱壳静水压力下临界压力预测研究

杨萌, 李戎, 梁斌

(河南科技大学土木建筑学院, 471023 洛阳)

**摘 要:**依据经典 Flugge 壳体理论,利用功能梯度材料(FGM)和均匀材料物理性质和力学行为相似性的均匀化转换计算方法,研究了静水压力下 FGM 圆柱壳临界压力的预测方法。针对水下 FGM 圆柱壳耦合系统的振动问题,考虑流体影响,采用波动法推导出相应的振动方程,使用了牛顿迭代法,以确定在静水压力下 FGM 圆柱壳的固有频率。根据临界载荷与固有频率为零的载荷水平线性相关性,运用拟合曲线法和均匀化转换后的公式法对静水压力下 FGM 圆柱壳临界压力进行了预测分析,并讨论了 FGM 圆柱壳各项参数对静水压力下 FGM 圆柱壳临界压力的影响。结果表明,FGM 圆柱壳的材料弹性模量  $E$  合值、几何尺寸  $h/R$  和  $L/R$ ,以及不同边界条件改变对临界压力影响较大。通过对多组算例的对比分析,证明了本研究方法的正确性和有效性。使用该方法进行预测的精度高,计算量小,能够为非均匀结构力学行为的分析提供新的研究途径。

**关键词:**FGM 圆柱壳;静水压力;Flügge 薄壳理论;波动法;临界压力预测;均匀化转换

**中图分类号:**TB535+.1 **文献标志码:**A **DOI:**10.11776/j.issn.1000-4939.2023.04.027

## Research on free critical pressure prediction of the FGM cylindrical shells under hydrostatic pressure based on the homogenization transformation method

YANG Meng, LI Rong, LIANG Bin

(School of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Science and Technology, 471023 Luoyang, China)

**Abstract:** According to the classic Flugge shell theory, the calculation method of the homogenization conversion of the physical properties and mechanical behavior similarity of functionally graded materials (FGM) and homogeneous materials is used to study the prediction method of the critical pressure of FGM cylindrical shells under hydrostatic pressure. Considering the influence of the fluid, the wave method is used to derive the vibration equation of the underwater FGM cylindrical shell coupled system, and the Newton iteration method is used to find the natural frequency of the FGM cylindrical shell under hydrostatic pressure; According to the linear correlation between the critical load and the load level when the natural

收稿日期:2021-10-02

修回日期:2022-10-11

基金项目:国家自然科学基金资助项目(No. U1604135;11402077);河南省科技攻关资助项目(No. 202102210039)

通信作者:杨萌。E-mail: ymlxm@163.com

引用格式:杨萌,李戎,梁斌. 基于均匀化转换方法的 FGM 圆柱壳静水压力下临界压力预测研究[J]. 应用力学学报, 2023, 40(4): 956-964.

YANG Meng, LI Rong, LIANG Bin. Research on free critical pressure prediction of the FGM cylindrical shells under hydrostatic pressure based on the homogenization transformation method[J]. Chinese journal of applied mechanics, 2023, 40(4): 956-964

frequency is zero, the critical pressure of the FGM cylindrical shell under hydrostatic pressure is predicted and analyzed by the fitting curve method and the formula method after homogenization conversion, and the influence of various parameters of FGM cylindrical shell on the critical pressure of FGM cylindrical shell under hydrostatic pressure is discussed. The results show that the total value of the material elastic modulus  $E$  of the FGM cylindrical shell, geometric dimensions  $h/R$  and  $L/R$  of the FGM cylindrical shell, and changes in different boundary conditions have a greater impact on the critical pressure. Through the comparative analysis of multiple sets of calculation examples, the correctness and effectiveness of the method in this paper are verified, and the prediction accuracy is high and the calculation amount is small, which can provide a new exploration approach for the analysis of the mechanical behavior of non-uniform structures.

**Key words:** FGM cylindrical shells; hydrostatic pressure; Flügge's theory; wave method; critical pressure prediction; homogenization conversion

板壳结构在土木、航空、造船、核反应堆等工程领域有着广泛应用。这种结构的承载能力往往受到屈曲的限制,但保持在材料的线性弹性范围内,临界载荷对于圆柱壳的安全性来说非常重要。试验方法获得圆柱壳的临界载荷具有破坏性以及代价高等缺点,因此,许多学者致力于研究无损圆柱壳临界载荷的预报方法<sup>[1]</sup>。对于各向同性和层压复合材料圆柱壳稳定性研究,广大学者已有大量研究<sup>[2-4]</sup>。近几十年,一种新型复合材料-功能梯度材料(functional gradient material, FGM)得到了广泛研究及应用,其材料特性在厚度方向上逐渐平滑变化,消除了传统层合复合材料的界面问题。与均质材料结构相比,由于材料性质空间变化,为获得 FGM 结构应力和位移场,需要求解变系数偏微分方程,这是 FGM 结构分析中一个难题。考虑到 FGM 圆柱壳应用范围较广,研究该类壳体动力特性对其强度和安全设计具有重要意义。

由于 FGM 圆柱壳材料在厚度方向具有连续性变化的性质,因此其表现出与均匀材料圆柱壳结构不同的特性<sup>[5]</sup>。李世荣等<sup>[6]</sup>的研究表明,FGM 结构的力学行为分析比较复杂,但可以通过理论分析方法进行比较,并得到与均匀材料结构相似的结果,成功将 FGM 梁板的微分方程边值问题求解转化为与梁板均匀材料及几何特性有关的系数计算问题。这种方法可以为 FGM 结构的力学行为分析提供重要的参考和借鉴。以上研究结果表明,FGM 圆柱壳材料具有厚度方向的连续性变化,因此其力学行为与均匀材料圆柱壳不同。但是可以通过物理规律和数学理论,揭示 FGM 圆柱壳和均匀材料圆柱壳之间的固有关系,并利用均匀材料圆柱壳的解析方法来获

得 FGM 圆柱壳的解答,从而实现 FGM 圆柱壳力学行为的“均匀化”转换计算。

根据本项目组<sup>[7-11]</sup>的研究结果,当壳体的几何尺寸、荷载工况和边界条件相同时,FGM 圆柱壳和相应的均匀材料圆柱壳的固有频率和屈曲临界载荷之间存在一定的联系,并且这种联系表现出很强的规律性。此外,其他学者<sup>[12-13]</sup>的研究结果也支持了这种规律性的存在。因此,本研究基于静水压力下 FGM 圆柱壳与均匀材料圆柱壳力学和数学模型之间相似关系,利用 Flügge 经典壳体理论,使用均匀材料圆柱壳的临界压力求解公式来计算 FGM 圆柱壳的临界压力。这种方法是基于 FGM 圆柱壳和均匀材料圆柱壳之间存在一定的联系和规律性,无需考虑其复杂的物理特性和边界条件。这种方法可为工程应用提供一个实用便捷的计算公式。

## 1 基本方程

FGM 圆柱壳力学模型如图 1 所示。其内表面由陶瓷或其他材料构成,外表面为金属材料,流场为理想流体组成的静止流场,材料密度为  $\rho$ ,泊松比为  $\mu$ ,声传播速度为  $C_f$ ,杨氏模量为  $E$ ,中面半径为  $R$ ,壳体长度为  $L$ ,壁厚为  $h$ ,流体密度为  $\rho_f$ 。本研究选取了基础坐标系  $(x, \theta, r)$ ,并使用  $u, v, w$  分别表示壳体中面的轴向、周向和径向位移。

用某一与母线正交的基准面(通常与壳的一端重合)来测量到所考虑点的距离,这个距离用  $x$  表示。同时, $\theta$  表示从某一基准母线(不一定是顶部母线)到该点的角度。为了表示无量纲坐标  $x/R$  和  $\theta$  的导数,将使用符号“'”和“\*”。

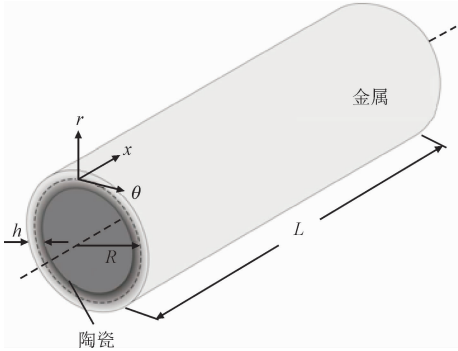


图1 FGM 圆柱壳模型  
Fig.1 FGM cylindrical shell model

$$R \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} = (\cdot)', \frac{\partial(\cdot)}{\partial \theta} = (\cdot)^* \tag{1}$$

柱壳的变形可以由点  $A$  的 3 个坐标分量来描述,其中点  $A$  的坐标包括  $x, \theta$  和与中间曲面的距离  $z$  ( $z$  的正号规定使  $R+z$  等于该点至圆柱轴线的距离)。这 3 个坐标分量分别对应沿母线的位移  $u_A$  (正方向为  $x$  增加方向)、半径为  $R+z$  圆周上的环向位移  $v_A$  (正方向为  $\theta$  增加方向)和径向位移  $w_A$  (正方向为向外)。

1.1 均匀化转换基本模型

FGM 圆柱壳体的功能梯度特性可以通过控制组成材料的体积分数来实现<sup>[14]</sup>。当壳体由两种不同材料组成时,假设分别具有弹性模量  $E_i, E_o$ ,泊松比  $\mu_i, \mu_o$ 和质量密度  $\rho_i, \rho_o$ ,壳体内外半径分别为  $R_i, R_o$ 。沿着壳体厚度方向的等效弹性模量  $E$ 、泊松比  $\mu$  和质量密度  $\rho$  可以表示为

$$\begin{cases} E = (E_o - E_i)[0.5 + z/h]^p + E_i \\ \mu = (\mu_o - \mu_i)[0.5 + z/h]^p + \mu_i \\ \rho = (\rho_o - \rho_i)[0.5 + z/h]^p + \rho_i \end{cases} \tag{2}$$

其中,  $p$  为 FGM 组成材料的体积分数幂指数 ( $0 \leq p < \infty$ )。当  $p=0$  和  $p \rightarrow \infty$  时,功能梯度材料分别退化为物性参数为  $E_o, \mu_o, \rho_o$  和  $E_i, \mu_i, \rho_i$  的均匀材料。为计算方便,通常两种材料泊松比  $\mu$  差别都不大,可以将泊松比看作常数<sup>[15]</sup>。设  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$  为功能梯度材料两个无量纲系数,  $\alpha = E_o/E_i - 1$ 。

$$\{D, K\} = \int_{-h/2}^{h/2} \frac{E}{1 - \mu^2} \{1, z^2\} dz = \{D_i \varphi_1, K_i \varphi_2\} \tag{3}$$

$$\varphi_1 = 1 + \frac{\alpha}{p+1}, \varphi_2 = 1 + \frac{3\alpha(p^2 + p + 2)}{(p+1)(p+2)(p+3)} \tag{4}$$

当  $p \rightarrow \infty$  时,  $\varphi_1 = \varphi_2 = 1$ ; 当  $p=0$  时,  $\varphi_1 = \varphi_2 =$

$$E_o/E_i。$$

1.2 物理几何方程

根据 Flügge 薄壳理论基本假设,内力与变形间表达式<sup>[16]</sup>为

$$\begin{cases} N_x = \frac{D}{R}(u' + \mu v^* + \mu w) - \frac{K}{R^3}w'' \\ N_\theta = \frac{D}{R}(v^* + w + \mu u') + \frac{K}{R^3}(w^{**} + w) \\ N_{x\theta} = \frac{D(1-\mu)}{2R}(u^* + v') + \frac{K(1-\mu)}{2R^3}(v' - w'^*) \\ N_{\theta x} = \frac{D(1-\mu)}{2R}(u^* + v') + \frac{K(1-\mu)}{2R^3}(u^* + w'^*) \\ M_x = \frac{K}{R^2}(w'' + \mu w^{**} - u' - \mu v^*) \\ M_\theta = \frac{K}{R^2}(w + w^{**} + \mu w'') \\ M_{x\theta} = \frac{K}{R^2}(1-\mu)(w'^* - v') \\ M_{\theta x} = \frac{K}{R^2}(1-\mu)(w'^* + \frac{1}{2}u^* - \frac{1}{2}v') \end{cases} \tag{5}$$

1.3 运动平衡方程

静水压力下 Flügge 经典壳体理论运动方程力的平衡方程式<sup>[16]</sup>为

$$\begin{cases} N'_x + N'_{\theta x} - P_0(u^{**} - w') - \frac{P_0}{2}u'' + p_x R = 0 \\ RN'_\theta + RN'_{x\theta} - M'_\theta - M'_{x\theta} - RP_0(v^{**} + w^*) - \frac{RP_0}{2}v'' + p_\theta R^2 = 0 \\ M''_\theta + M'_{x\theta} + M'_{\theta x} + M''_x + RN_\theta + RP_0(u' - v^* + w^{**}) + \frac{RP_0}{2}w'' - p_r R^2 = -\psi \end{cases} \tag{6}$$

其中:  $P_0$  代表壳体所受的静水压力;  $\psi$  代表在壳体外壁作用的流体声载荷,其方向指向圆心。

$$\begin{cases} p_x = \bar{\rho} h \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, p_\theta = \bar{\rho} h \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}, p_r = \bar{\rho} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ \bar{\rho} = \int_{-h/2}^{h/2} \rho dz / h = \rho_i \bar{\varphi} \\ \bar{\varphi} = 1 + \beta / (p+1), \beta = \rho_o / \rho_i - 1 \end{cases} \tag{7}$$

其中:  $\varphi$  是一个无量纲系数;  $\rho$  代表经过均匀化转换后的 FGM 圆柱壳质量密度。

圆柱壳的振动位移函数根据波动法可以表示为

$$\begin{cases} u(x,\theta,t) = U_m \cos(n\theta) e^{i\omega t - ik_m x} \\ v(x,\theta,t) = V_m \sin(n\theta) e^{i\omega t - ik_m x} \\ w(x,\theta,t) = W_m \cos(n\theta) e^{i\omega t - ik_m x} \end{cases} \quad (8)$$

根据波动法,圆柱壳的振动位移函数可以表示为  $U_m$ 、 $V_m$  和  $W_m$ ,分别表示  $x$ 、 $\theta$  和  $z$  方向的波幅。此外,固有角频率  $\omega$ 、 $\theta$  方向波数  $n$  和  $x$  方向波数  $m$  是该公式的重要参数。波动法的基本思想是在圆柱壳弯曲振动分析中,可以使用梁弯曲振动波数来替代圆柱壳轴向波数  $k_m$ ,其大小与约束边界约束刚度有关<sup>[17]</sup>。表1中提供了相应的数据。

表1 不同边界条件下  $k_m$  值

Tab. 1 The values of  $k_m$  under different boundary conditions

边界条件	$k_m$
两端自由(F-F)/两端刚固(C-C)	$k_m = (2m + 1)\pi/2/L$
一端自由,一端滑移(F-S)/ 一端刚固,一端滑移(C-S)	$k_m = (4m - 1)\pi/4/L$
一端刚固,一端自由(C-F)/ 一端滑移,一端简支(S-SS)	$k_m = (2m - 1)\pi/2/L$
一端自由,一端简支(F-SS)/ 一端刚固,一端简支(C-SS)	$k_m = (4m + 1)\pi/4/L$
两端简支(SS-SS)/ 两端滑移(S-S)	$k_m = m\pi/L$

1.4 耦合声振方程

在静水压力作用下,圆柱壳体的声波方程可以表示为理想流体在柱坐标系下的 Helmholtz 波动方程,即

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (9)$$

其中: $t$  为时间; $c$  为流体的声速; $r$  坐标沿壳体径向选取。

对于声压场,满足 Helmholtz 波动方程的流体声压有如下形式的解。

$$\psi = \psi_m \cos(n\theta) H_n^{(2)}(k_r r) e^{i\omega t - ik_m x} \quad (10)$$

其中,声压场满足 Helmholtz 波动方程,其解可以用第二类  $n$  阶 Helmholtz 函数  $H_n^{(2)}(\cdot)$  表示,径向波数  $k_r$  和轴向波数  $k_m$  之间存在关系式

$$(k_r R)^2 = \Omega^2 (C_L/C_F)^2 - (k_m R)^2 \quad (11)$$

其中, $\Omega$ 、 $C_L$ 、 $C_F$  分别为无量纲频率参数、圆柱壳体的声速及流体的声速。在壳体外壁与流体的界面上,流体与壳体径向位移必须相等,该耦合条件为

$$\begin{aligned} & - (1/i\omega\rho_f) \left( \partial\psi/\partial r \right) \Big|_{r=R} = \partial\omega/\partial t \Big|_{r=R} \\ \psi_m & = [\omega^2 \rho_f / k_r H_n^{(2)'}(k_r R)] W_m \end{aligned} \quad (12)$$

其中: $\rho_f$  是流体密度; $H_n^{(2)'}(k_r R)$  中撇号表示对变量  $k_r R$  的导数。

2 均匀化转换计算通解

将均匀化系数  $\varphi_1$ 、 $\varphi_2$  代入式(5)和式(7)中,并结合式(10),考虑壳体壁上的声压,应用波动法式(8)得到耦合系统的运动方程的矩阵形式,即

$$\begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ -L_{12} & L_{22} & L_{23} \\ -L_{13} & L_{23} & L_{33} - F_L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_m \\ V_m \\ W_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (13)$$

其中: $L_{ij}(i,j=1,2,3)$  是通过位移  $x$  和旋转角  $\theta$  进行计算得到的参数; $F_L$  表示由流体声场作用产生的流体荷载。

$$\begin{cases} L_{11} = (\varphi_1 - T_1)\lambda^2 + [(\varphi_1 + k\varphi_2)(1 - \mu)/2 - T_2]n^2 + \Omega^2 \\ L_{12} = -L_{21} = \lambda ni\varphi_1(1 + \mu)/2 \\ L_{13} = -L_{31} = \lambda i[\varphi_1\mu + T_2 + k\varphi_2\lambda^2 - k\varphi_2n^2(1 - \mu)/2] \\ L_{22} = (\varphi_1 - T_2)n^2 + [(\varphi_1 + 3\varphi_2k)(1 - \mu)/2 - T_1]\lambda^2 + \Omega^2 \\ L_{23} = L_{32} = (\varphi_1 - T_2)n + \varphi_2k\lambda^2n(3 - \mu)/2 \\ L_{33} = -(\varphi_2k + T_2)n^2 + \varphi_2kn^4 + 2\varphi_2k\lambda^2n^2 + \varphi_2k\lambda^4 + \varphi_1 + \varphi_2k - T_1\lambda^2 + \Omega^2 \end{cases} \quad (14)$$

其中: $k = h^2/(12R^2)$ ;  $\Omega^2 = \overline{\varphi}\rho_i(1 - \mu^2)\omega^2 R^2/E_i$ ;  $\lambda = k_m R$ ;  $T_1 = (1 - \mu^2)RP_0/(2E_i h)$ ;  $T_2 = (1 - \mu^2) \cdot RP_0/(E_i h)$  分别表示静水压力对于轴向和环向振动的影

$$\begin{aligned} F_L & = \Omega^2 (\rho_f/\rho) (R/h) (k_r R)^{-1} \cdot \\ & \quad [H_n^{(2)}(k_r R)/H_n^{(2)'}(k_r R)] \end{aligned} \quad (15)$$

通过将具体的边界条件代入方程,求解得到的结果是关于未知数  $\omega$  的两个多项式  $P_1(\omega)$  和  $P_2(\omega)$ ,即

$$P_1(\omega) - P_2(\omega)F_L = 0 \quad (16)$$

使用牛顿迭代法可以计算出在已知静水压力条件下,FGM 圆柱壳的固有频率。在已知参数  $k_m$  的情况下,可以通过一定的外压计算出耦合系统的无量

钢频率,并据此推导出水下圆柱壳静水压力和固有频率之间的关系。这种转化使得 FGM 圆柱壳的非均匀性特征可以用单一材料特征来表示临界压力值,在预测失稳载荷时具有无损性。

3 数值计算及分析

3.1 正确性和有效性验证

以钢与氮化硅复合的 FGM 圆柱壳为例,体积分数幂指数  $p$  趋近于 0 时,FGM 圆柱壳可以看做是各向同性纯钢圆柱壳。在两端简支边界条件下,计算了各向同性纯钢圆柱壳的固有频率,并将结果与参考文献[4]的分析结果进行了对比,验证了本研究关于水下圆柱壳固有频率计算方法的正确性(数据对比见表 2)。壳体几何参数:  $R=1\text{ m}$ ,  $m=1$ ,  $n=2$ ,  $L=20\text{ m}$ ,  $h=0.01\text{ m}$ ,  $p=0$ ; 材料属性:  $\rho=7850\text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_f=1000\text{ kg/m}^3$ ,  $C_F=1500\text{ m/s}$ ,  $E=2.1\times10^{11}\text{ N/m}^2$ ,  $\mu=0.30$ 。

表 2 水下各向同性圆柱壳两端简支时固有频率的对比分析  
Tab.2 Comparison analysis of natural frequencies of underwater isotropic cylindrical shells with simply supported ends

$P_0/\text{kPa}$	固有频率/Hz		固有频率平方/Hz <sup>2</sup>	
	本研究	文献[4]	本研究	文献[4]
10	3.087	3.076	9.531	9.461
20	2.872	2.858	8.250	8.168
30	2.640	2.625	6.970	6.892
40	2.385	2.369	5.689	5.616
50	2.099	2.083	4.409	4.339
60	1.768	1.749	3.128	3.059
70	1.359	1.333	1.848	1.778

从表 2 数据可以看出,FGM 圆柱壳固有频率的求解结果与文献[4]误差很小,精度高。现有文献采用复杂的偏微分方程来求解具有简支端的各向同性水下圆柱壳的固有频率,每次改变边界条件都需要重新求解,计算效率较低。相比之下,本研究提出的方法省略了积分和偏微分求解过程,具有更高的计算效率。为描述功能梯度材料(FGM)圆柱壳的不均匀特征,通过引入均匀化系数  $\varphi_1$  和  $\varphi_2$ ,消除了求解过程中的复杂积分和偏微分方程,从而实现了高效、简便的计算。这种方法基于已知的经典均匀

材料圆柱壳理论,可以有效地解决 FGM 圆柱壳问题,将复杂问题简化为简单问题,计算量从本质上缩减,具有较大推广应用价值。

3.2 FGM 圆柱壳静水压力下临界压力预测

SINGER 等<sup>[18]</sup>指出圆柱壳预应力对固有频率影响致总荷载与加载固有频率平方成线性关系:  $f^2 + q = 1$ 。其中  $f = \bar{\omega}_{mn}/\omega_{mn}$ ,  $\bar{\omega}_{mn}$  为加载固有频率,  $\omega_{mn}$  为空载固有频率,均与  $m$  向波和  $n$  向波定义的相同振动模式有关;  $q = P/P_{cr}$ ,  $P$  为施加荷载,  $P_{cr}$  为线性化屈曲载荷(来自特征值屈曲分析或理论屈曲方程)。从公式中看出屈曲载荷与固有频率为零的载荷水平具有线性相关性,如果能够计算出圆柱壳在固有频率为零时所受的静水压力,那么可以将该压力视为圆柱壳的临界荷载,即弹性理论解。因此,可以通过线性拟合的方法来计算固有频率为零时所对应的静水压力,以此来预测临界压力。

根据表 2 的数据,可以绘制出图 2 中壳体固有频率平方与静水压力的关系曲线,近似呈线性关系。通过对该曲线进行线性拟合,预测当固有频率平方为 0 时,所对应的临界压力数值为 84.436 kPa。与参考文献[4]中给出的 83.9 kPa 相比,相对误差仅为 0.64%。这一结果验证了本研究方法在预测临界压力方面的准确性。

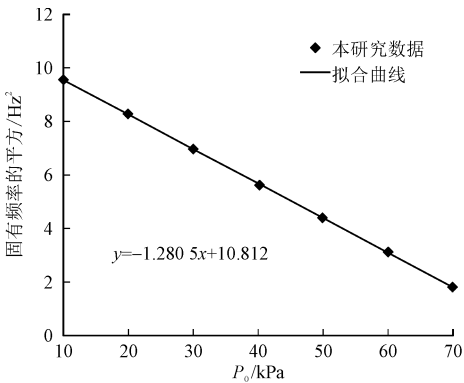


图 2 连续变化静水压力下圆柱形各向同性壳体固有频率平方曲线  
Fig.2 The curve of the squared natural frequency variation of an isotropic cylindrical shell under continuously changing hydrostatic pressure

选择幂指数  $p=1$  进行研究,此时 FGM 圆柱壳体的外表面采用钢材料,内表面采用氮化硅材料。壳体几何参数:  $p=1$ ,  $R=1\text{ m}$ ,  $h=0.01\text{ m}$ ,  $L=20\text{ m}$ ,  $m=1$ ,  $n=2$ ; 材料属性:  $E_0=2.07788\times10^{11}\text{ N/m}^2$ ,  $\rho_0=$

$8\,166\text{ kg/m}^3$ ,  $E_i = 3.2227 \times 10^{11}\text{ N/m}^2$ ,  $\rho_i = 2\,370\text{ kg/m}^3$ ,  $\rho_f = 1\,000\text{ kg/m}^3$ ,  $C_F = 1\,500\text{ m/s}$ ,  $\mu = 0.30$ 。由固有频率平方的曲线,通过线性拟合预测此时临界压力为  $107.06\text{ kPa}$ ,见图3。

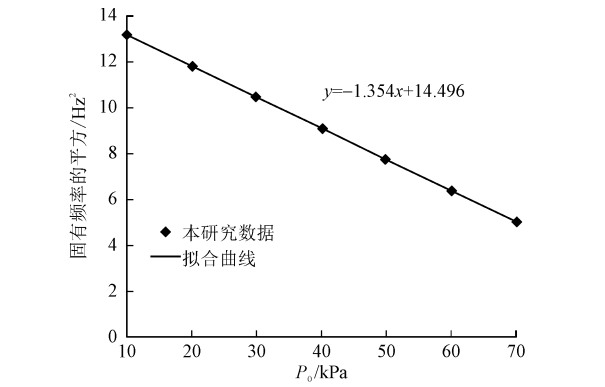


图3 连续变化静水压力下FGM圆柱壳固有频率平方变化曲线

Fig.3 The curve of the squared natural frequency of an FGM cylindrical shell under continuously changing hydrostatic pressure

$$P_{cr} = \frac{2(n^2 - 1)}{2(n^2 - 1) + a_1^2} \cdot \left\{ \frac{\varphi_2 E_i h^3}{12(1 - \mu^2) R^3} \cdot \frac{(a_1^2 + n^2 - 1)^2}{(n^2 - 1)} + \frac{\varphi_1 E_i h}{R} \cdot \frac{a_1^4}{(a_1^2 + n^2)^2 (n^2 - 1)} \right\},$$
$$a_1 = \frac{\pi R}{L} \tag{17}$$

吴连元<sup>[19]</sup>提出了圆柱壳在静水压力作用下的弹性屈曲临界压力公式,该公式也被称为希曼斯基公式。这个公式是在两端简支边界条件下推导出来的。希曼斯基公式经过式(2)、式(3)和式(4)均匀化处理后得到FGM圆柱壳静水压力下临界压力预测表达式(17),计算后其理论值为  $106.778\text{ kPa}$ ,与本研究拟合结果相对误差为  $0.264\%$ ,证明本研究方法应用在FGM圆柱壳静水压力下临界压力预测的有效性。

3.3 FGM圆柱壳主要参数在相同边界静水压力条件下对临界压力影响

功能梯度材料各组分材料的特性详见表3。边界条件设为两边简支,基本参数为  $k_m = m\pi/L$ ,  $\rho_f = 1\,000\text{ kg/m}^3$ ,  $C_F = 1\,500\text{ m/s}$ ,  $m = 1$ ,  $n = 2$ ,  $p = 1$ ,  $L = 20\text{ m}$ ,  $R = 1\text{ m}$ ,  $h = 0.01\text{ m}$ 。

表3 功能梯度材料各组分材料的特性					
Tab.3 Characteristics of each component material in functionally graded materials					
材料特性	不锈钢	铝	钛合金	镍	氧化锆
$E/(10^{11}\text{ N} \cdot \text{m}^{-2})$	2.077 88	0.7	1.057	2.051	1.68
$\mu$	0.317	0.3	0.298	0.31	0.3
$\rho/(\text{kg} \cdot \text{m}^{-3})$	8 166	2 707	4 429	8 900	5 700

注:不锈钢、铝和钛合金为FGM圆柱壳外层组合材料,镍和氧化锆为内层组合材料。

图4为简支边界,各种材质FGM圆柱壳静水压力下,不同  $h/R$  改变后的临界压力  $P_{cr}$  规律曲线。从图中可以看出,不同材质FGM圆柱壳,临界压力  $P_{cr}$  随  $h/R$  增大而增大;  $h/R$  不变,FGM圆柱壳组分弹性模量  $E$  合值越大,临界压力  $P_{cr}$  越大。临界压力  $P_{cr}$  为基频时取值,FGM圆柱壳在相同  $h/R$  时基频  $n$  值相同,且随  $h/R$  增大,  $n$  值都收敛于2,因此  $n = 2$  作为基本参数是合理的。增加  $h/R$  比值和各组分材料  $E$  合值,FGM圆柱壳可获得更大承载能力。

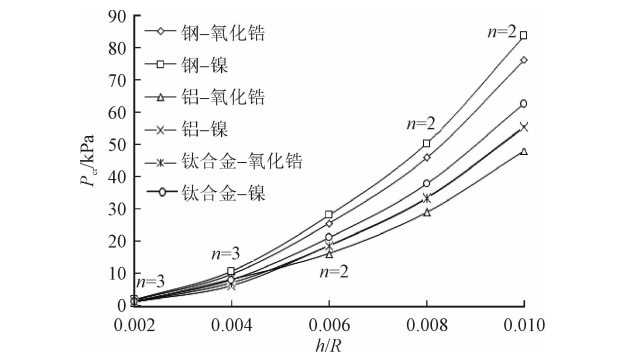


图4 不同  $h/R$  简支边界条件下  $P_{cr}$  规律曲线

Fig.4 Variation of  $P_{cr}$  with different  $h/R$  under SS-SS

图5为简支边界,各种材质FGM圆柱壳静水压力下,不同  $L/R$  改变后的临界压力  $P_{cr}$  规律曲线。从图中能看出,不同材质FGM圆柱壳,临界压力  $P_{cr}$  随  $L/R$  增大而减少;  $L/R$  不变,FGM圆柱壳组分弹性模量  $E$  合值越大,临界压力  $P_{cr}$  越大。临界压力  $P_{cr}$  为基频时取值,每类FGM圆柱壳在相同  $L/R$  时基频的  $n$  值相同,且随  $L/R$  增大,  $n$  值都收敛于2,说明  $n = 2$  作为基本参数是合理的。减小  $L/R$  比值和增加各组分材料  $E$  合值,FGM圆柱壳可取得更大承载能力。

图6为简支边界,各种材质FGM圆柱壳静水压力下,不同  $p$  改变后的临界压力  $P_{cr}$  规律曲线。从图中分三类情况分析,一类是  $E$  比值大于1的,比值越大,临界压力  $P_{cr}$  随  $p$  增加呈下降趋势;一类是  $E$  比

值接近1的,临界压力 $P_{cr}$ 随 $p$ 增加变化很小,可忽略;还有一类是 $E$ 比值小于1的,临界压力 $P_{cr}$ 随 $p$ 增加呈上升趋势。临界压力 $P_{cr}$ 为基频时取值,每类功能梯度材料在相同 $p$ 时基频的 $n$ 值相同,都为2。适当调整功能梯度材料 $p$ 值是可以达到提高临界压力 $P_{cr}$ 目的,也可以充分发挥每种材料特性,取得最优组合。

$P_{cr}$ 随着 $n$ 增加,快速增大; $n$ 不变,不同材质 FGM 圆柱壳 $E$ 合值越大,临界压力 $P_{cr}$ 越大;基频的 $n$ 值都为2。加大 FGM 圆柱壳各组分材料 $E$ 合值,可获得更大承载能力。

因铝-镍和钛合金-氧化锆两种组分材料 $E$ 相加后合值数值十分接近,而图4、图5、图7中所考虑参数变化规律跟组合 $E$ 合值直接相关联,两种组合固有频率计算结果相近,图中变化曲线基本重合。

图8以图3中背景材料为计算基础数据,考察 FGM 圆柱壳在不同边界环境和确定的材料组合,在静水压力条件下的临界压力数值大小。根据图中数据拟合曲线得出结论,在相同条件下,不同边界条件下的临界压力 $P_{cr}$ 遵循以下规律: $P_{cr}(\text{F-F 或 C-C}) > P_{cr}(\text{F-SS 或 C-SS}) > P_{cr}(\text{SS-SS 或 S-S}) > P_{cr}(\text{F-S 或 C-S}) > P_{cr}(\text{C-F 或 S-SS})$ 。两端自由(F-F)或两端刚固(C-C)的边界条件,FGM 圆柱壳承载能力最大。此结论同样适用于各种材料组合的 FGM 圆柱壳。

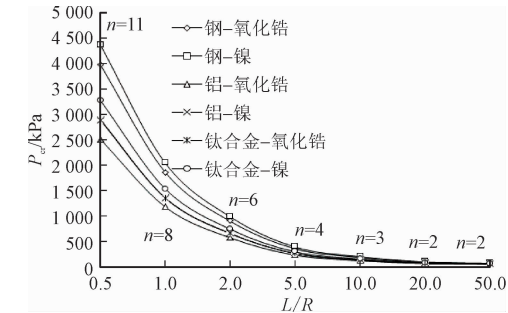


图5 不同 $L/R$ 简支边界条件下 $P_{cr}$ 规律曲线  
Fig.5 Variation of  $P_{cr}$  with different  $L/R$  under SS-SS

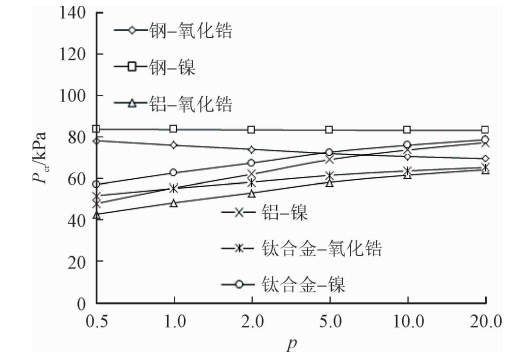


图6 不同 $p$ 简支边界条件下 $P_{cr}$ 规律曲线  
Fig.6 Variation of  $P_{cr}$  with different  $p$  under SS-SS

图7为简支边界,各种材质 FGM 圆柱壳静水压力下,不同 $n$ 改变后的临界压力 $P_{cr}$ 规律曲线。

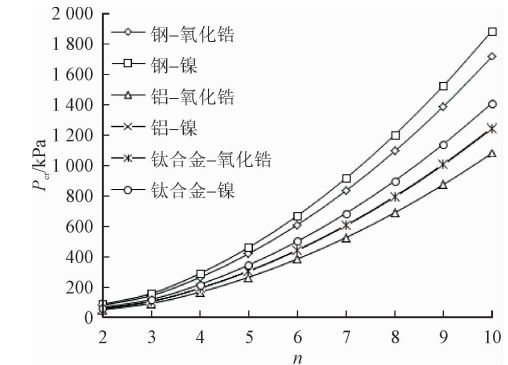


图7 不同 $n$ 简支边界条件下 $P_{cr}$ 规律曲线  
Fig.7 Variation of  $P_{cr}$  with different  $n$  under SS-SS  
从图中分析,不同材质 FGM 圆柱壳,临界压力

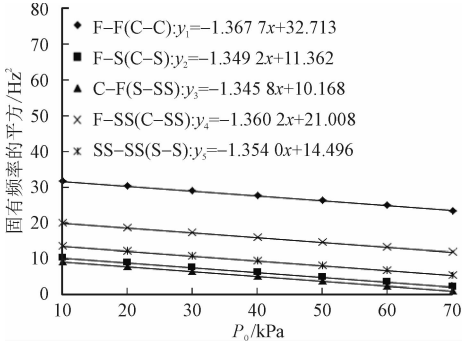


图8 不同边界连续变化的静水压力下 FGM 圆柱壳固有频率的平方变化曲线  
Fig.8 The change curve of the square of the natural frequency of the FGM cylindrical shell under continuously changing hydrostatic pressure with different boundaries

4 计算效率分析

本研究中采用了统一的功能梯度材料物性参数表达形式,避免了传统方法中繁琐的积分和矩阵运算,简化了问题求解的难度和复杂度,并保证了可靠的计算精度<sup>[20]</sup>。在多次计算中,3种不同方法的计算效率对比如表4所示,通过改进傅里叶级数计算方法求得了 $k_m$ 值<sup>[17]</sup>。其他方法预测 FGM 圆柱壳临界压力的方法都是在特定边界条件下进行的,不能进行各种边界条件的任意切换。本方法针对不同边界条件下对应的 $k_m$ 值,可以进行多角度、多条件的预测对比分析,以探求其中的规律。

表 4 计算效率对比  
Tab.4 Comparison of calculation efficiency

计算方法	数值逼近技术	Rayleigh-Ritz 法	本研究方法
是否运算矩阵和积分	是	是	否
是否迭代	是	是	是
不同边界条件处理	单独计算	单独计算	仅需变换 $k_m$ 值
求导难易	难	难	易
计算精度	精	精	精
计算耗时/s	>1	1.4 ~ 5.0	0.002
计算效率	一般	一般	优

注:i7-7700 CPU@3.60 GHz,16 GB 内存,64 位操作系统。

5 结 论

本研究利用均匀材料圆柱壳拟合曲线法和公式法,运用 FGM 圆柱壳均匀化转换原理来解决静水压力各种边界条件下 FGM 圆柱壳临界载荷  $P_{cr}$  预测问题,使功能梯度材料复杂的运算环境得以简化,效率提高,为功能梯度材料更广泛应用提供可靠便捷的理论基础。经多组算例分析,可得如下结论。

1)FGM 圆柱壳在简支边界条件下: $P_{cr}$ 随  $h/R$ 、 $n$  增大而增大,随  $L/R$  增大而减少; $h/R$ 、 $n$  和  $L/R$  不变,功能梯度材料组分弹性模量  $E$  合值越大, $P_{cr}$  越大; $P_{cr}$  都为基频时取值,FGM 圆柱壳在相同  $h/R$ 、 $L/R$  时基频的  $n$  值相同,且随  $h/R$ 、 $L/R$  增大, $n$  值都收敛于 2;改变  $p$  值,两种组分材料  $E_o/E_i$  比值对  $P_{cr}$  有较大影响, $E_o/E_i$  接近于 1 时,FGM 圆柱壳功能最稳定。

2) $P_{cr}$  在不同边界条件下,服从  $P_{cr}(F-F$  或  $C-C) > P_{cr}(F-SS$  或  $C-SS) > P_{cr}(SS-SS$  或  $S-S) > P_{cr}(F-S$  或  $C-S) > P_{cr}(C-F$  或  $S-SS)$  的规律。在同等条件下,两端自由 (F-F) 或两端刚固 (C-C) 的边界条件,FGM 圆柱壳  $P_{cr}$  最大。

3)在基频模态下,增加 FGM 圆柱壳厚度、缩小有效长度、加大材料弹性模量  $E$  合值和加强边界约束,可提高 FGM 圆柱壳承载能力。

参考文献:

[1] GUO Y,DO H,RUESS M. Isogeometric stability analysis of thin shells;from simple geometries to engineering models[J]. International journal for numerical methods in engineering, 2019, 118 (8):433-458.

[2] LABANS E,ABRAMOVICH H,BISAGNI C. An experimental vi-

bration-buckling investigation on classical and variable angle tow composite shells under axial compression[J]. Journal of sound and vibration,2019,449,315-329.

[3] FRANZONI F,DEGENHARDT R,ALBUS J,et al. Vibration correlation technique for predicting the buckling load of imperfection-sensitive isotropic cylindrical shells; An analytical and numerical verification[J]. Thin-walled structures,2019,140:236-247.

[4] 陈忱,李天匀,朱翔,等. 基于波传播法的水下圆柱壳临界载荷-频率特性分析[J]. 中国造船,2012,53(1):130-136.

CHEN Chen,LI Tianyun,ZHU Xiang,et al. Frequency characteristics analysis for critical load of a submerged cylindrical shell based on wave propagation approach[J]. Ship building of China,2012,53 (1):130-136(in Chinese).

[5] NASIRMANESH A,MOHAMMADI S. Eigenvalue buckling analysis of cracked functionally graded cylindrical shells in the framework of the extended finite element method [J]. Composite structures, 2017,159:548-566.

[6] 李世荣,张靖华,徐华. 功能梯度与均匀圆板弯曲解的线性转换关系[J]. 力学学报,2011,43(5):871-877.

LI Shirong,ZHANG Jinghua,XU Hua. Linear transformation between the bending solutions of functionally graded andhomogenous circular plats[J]. Chinese journal of theoretical and applied mechanics,2011,43(5):871-877(in Chinese).

[7] 李戎,梁斌,NODA N A,等. 基于波动法的静水压力下功能梯度圆柱壳振动特性研究[J]. 船舶力学,2013,17(增刊1):148-154.

LI Rong,LIANG Bin,NODA N A,et al. Study on vibration of functionally graded cylindrical shells subjected to hydrostatic pressure by wave propagation method[J]. Journal of ship mechanics,2013, 17(S1):148-154(in Chinese).

[8] LI R,LIU L X,LIANG B,et al. An efficient method to improve the stability of submerged functionally graded cylindrical shell [J]. Journal of mechanical science and technology, 2019, 33 (6): 2527-2536.

[9] 李戎,杨萌,梁斌,等. 基于裂纹尖端应力比值的含裂纹功能梯度材料圆筒应力强度因子计算方法[J]. 工程力学,2020,37 (4):22-29.



- LI Rong, YANG Meng, LIANG Bin, et al. Calculation method of stress intensity factor for cracked functionally graded hollow cylinder based on the ratio of stresses at crack tip[J]. Engineering mechanics, 2020, 37(4): 22-29 (in Chinese).
- [10] 李戎, 杨萌, 刘林霞, 等. 水下 FG 圆柱壳临界载荷和固有频率预测方法[J]. 郑州大学学报(工学版), 2021, 42(1): 70-76.
- LI Rong, YANG Meng, LIU Linxia, et al. The prediction method for critical buckling pressure and natural frequency of submerged functionally graded cylindrical shell[J]. Journal of Zhengzhou University (engineering science), 2021, 42(1): 70-76 (in Chinese).
- [11] 李戎, 杨萌, 梁斌. 基于裂纹尖端应力比值的 FGM 板应力强度因子简便预测方法[J]. 船舶力学, 2019, 23(5): 566-574.
- LI Rong, YANG Meng, LIANG Bin. Convenient prediction method of the stress intensity factor of FGM plate based on the ratio of stresses at crack tip[J]. Journal of ship mechanics, 2019, 23(5): 566-574 (in Chinese).
- [12] CHEN W Q, BIAN Z G, LÜ C F, et al. 3D free vibration analysis of a functionally graded piezoelectric hollow cylinder filled with compressible fluid[J]. International journal of solids and structures, 2004, 41(3/4): 947-964.
- [13] JAHEDI R, ADIBNAZARI S, FARRAHI G H. Performance analysis of functionally graded coatings in contact with cylindrical rollers[J]. Advances in mechanical engineering, 2015, 7(2): 456848.
- [14] LOY C T, LAM K Y, REDDY J N. Vibration of functionally graded cylindrical shells[J]. International journal of mechanical sciences, 1999, 41(3): 309-324.
- [15] ABRATE S. Free vibration, buckling, and static deflections of functionally graded plates[J]. Composites science and technology, 2006, 66(14): 2383-2394.
- [16] FLÜGGE W. Stresses in shells[M]. 2nd ed. New York: Springer-Verlag, 1973.
- [17] ZHANG X M, LIU G R, LAM K Y. Vibration analysis of thin cylindrical shells using wave propagation approach[J]. Journal of sound and vibration, 2001, 239(3): 397-403.
- [18] SINGER J, ARBOCZ J, WELLER T, et al. Buckling experiments: experimental methods in buckling of thin-walled structures. shells, built-up structures, composites and additional topics, volume 2[J]. Applied mechanics reviews, 2003, 56(1): B5.
- [19] 吴连元. 板壳理论[M]. 上海: 上海交通大学出版社, 1989: 330.
- [20] 杨萌, 李戎, 梁斌. 基于 Flügge 理论的功能梯度圆柱壳自由振动响应均匀化转换计算方法[J]. 振动与冲击, 2020, 39(24): 63-68.
- YANG Meng, LI Rong, LIANG Bin. A homogenization transformation method for free vibration response of functionally graded cylindrical shells based on the Flügge theory[J]. Journal of vibration and shock, 2020, 39(24): 63-68 (in Chinese).

(编辑 李坤璐)